Limite et continuité des fonctions vectorielles

E, F et G désignent des espaces vectoriels munis de normes notées $\|.\|_E$, $\|.\|_F$ et $\|.\|_G$ ou indifféremment $\|.\|$.

I. Généralités

A désigne une partie de E.

1°) Définition

Déf : On appelle fonction vectorielle définie sur A et à valeurs dans F toute application $f : A \to F$.
On note $\mathcal{F}(A,F)$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Pour $f,g : A \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les fonctions $\lambda.f : A \to F$ et $f+g : A \to F$ par :
$\forall x \in A$, $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ et $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
Si de plus F est une algèbre, on définit la fonction $fg : A \to \mathbb{K}$ par :
$\forall x \in A$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Prop : $\mathcal{F}(A,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une $\mathbb{K}$-algèbre si F en est une.

Déf : Soit $\alpha : A \to \mathbb{K}$ et $f : A \to F$. On note $\alpha.f : A \to F$ la fonction définie par :
$\forall x \in A$, $(\alpha.f)(x) = \alpha(x).f(x)$.

2°) Applications bornées

Déf : Une application $f : A \to F$ est dite bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|f(x)\| \leq M$.
On note $\mathcal{B}(A,F)$ l'ensemble des fonctions bornées de A vers F.

Prop : $\mathcal{B}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$ normé par $N_\infty \ \|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|$.

De plus, si F est une algèbre normé, $\mathcal{B}(A,F)$ est une sous-algèbre normée.

Théorème :
Si $(F,\|.\|)$ est complet alors $(\mathcal{B}(A,F),\|.\|_\infty)$ l'est aussi.

3°) Applications lipschitziennes

Déf : Une application $f : A \subset E \to F$ est dite lipschitzienne ssi $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x,y \in A, \|f(x)-f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$.

Prop : Soit $f,g : A \subset E \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont lipschitziennes alors $f+g$ et λf aussi.

Prop : Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telles que $f(A) \subset B$.
Si f et g sont lipschitziennes alors $g \circ f$ aussi.

4°) Application à valeurs dans un espace vectoriel normé produit

Soit $F_1,\dots,F_n$ des espaces vectoriels normés. Considérons les projections canoniques $p_i : F = F_1 \times \cdots \times F_n \to F_i$.

Prop : Les applications p_i sont 1-lipschitziennes.

Considérons $f : A \subset E \to F$. $\forall x \in A, f(x) = \big(f_1(x),\dots,f_n(x)\big)$ ce qui introduit $f_i = p_i \circ f : A \to F_i$.

Déf : Les applications $f_1,\dots,f_n$ sont appelées applications coordonnées de f.

Prop : f est bornée ssi ses applications coordonnées le sont.

Prop : f est lipschitzienne ssi ses applications coordonnées le sont.

5°) Applications à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de F et $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$ la norme ∞ relative à $\mathcal{B}$.
Considérons $e_1^*,\dots,e_n^*$ les applications composantes dans la base $\mathcal{B}$.

Prop : Les applications e_i^* sont lipschitziennes.

Considérons $f : A \to F$. $\forall x \in A, f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n$ avec $f_i = e_i^* \circ f : A \to \mathbb{K}$.

Déf : Les applications $f_1,\ldots,f_n$ sont appelées fonctions composantes de f relatives à la base $(e_1,\ldots,e_n)$.

II. Limites d'une fonction à valeurs vectorielles

1°) Limites en un point

Soit A une partie de E , $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.

Déf : On dit que f tend vers $b \in F$ en a ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-b\|_F \leq \varepsilon$.
On note alors $f \xrightarrow[a]{} b$.

Théorème :
Si $f \xrightarrow[a]{} b$ et $f \xrightarrow[a]{} b'$ alors $b = b'$.

Déf : On dit que f converge en a ssi il existe $b \in F$ tel que $f \xrightarrow[a]{} b$. Cet élément b est alors unique, on l'appelle limite de f en a et on note $b = \lim\limits_a f$.

Théorème :
On a équivalence entre :
(i) $f \xrightarrow[a]{} b$
(ii) $\forall V$ voisinage de b $\exists U$ voisinage de a , $f(U \cap A) \subset V$,
(iii) $\forall V$ voisinage de b , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a relatif à A .

2°) Justification de la convergence

Soit $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.

a) par comparaison

Théorème :
Soit $f : A \to F$, $g : A \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.
Si $\|f(x)-b\| \leq g(x)$ et $g \xrightarrow[a]{} 0$ alors $f \xrightarrow[a]{} b$.

b) par les suites

Théorème : (caractérisation séquentielle)
Soit $f : A \subset E \to F$, a un élément adhérent à A et $b \in F$.
On a équivalence entre :
(i) $f \xrightarrow[a]{} b$
(ii) $\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to b$.

Cor : Si f tend vers b en $a \in \overline{A}$ alors $b \in \overline{f(A)}$.

c) par le critère de Cauchy

Déf : On dit que $f : A \subset E \to F$ satisfait le critère de Cauchy en $a \in \overline{A}$ ssi
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x-a\| \leq \alpha$ et $\|y-a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(y)-f(x)\| \leq \varepsilon$.

Prop : Si f converge en a alors f vérifie le critère de Cauchy en a .

Théorème :
Si F est complet et si f vérifie le critère de Cauchy en a alors f converge en a .

3°) Opérations sur les limites

Théorème :
Soit $f, g : A \subset E \to F$ et $a \in \overline{A}$.
Si $f \xrightarrow[a]{} b$ et $g \xrightarrow[a]{} c$ alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda f + \mu g \xrightarrow[a]{} \lambda b + \mu c$.
Si de plus F est une algèbre normée alors $fg \xrightarrow[a]{} bc$.

Cor : L'ensemble des fonctions de A vers F convergeant en a est un sous-espace vectoriel (ou sous-algèbre) de $\mathcal{F}(A,F)$ et $f \mapsto \lim\limits_a f$ y définit une application linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre)

Prop : Soit $f : A \subset E \to F$, $\alpha : A \subset E \to \mathbb{K}$ et $a \in \overline{A}$.
Si $\alpha \xrightarrow[a]{} \lambda$ et $f \xrightarrow[a]{} b$ alors $\alpha.f \xrightarrow[a]{} \lambda.b$.

Théorème :
Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telles que $f(A) \subset B$ et $a \in \overline{A}$
Si $f \xrightarrow[a]{} b$ et $g \xrightarrow[b]{} c$ alors $g \circ f \xrightarrow[a]{} c$.

Cor : Si $f \xrightarrow[a]{} b$ alors $\|f\| \xrightarrow[a]{} \|b\|$.

Théorème :
On suppose que F est un espace vectoriel normé produit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$.
Soit $f : A \subset E \to F$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ et $a \in \overline{A}$.
On a équivalence entre :
(i) $f \xrightarrow[a]{} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
(ii) $f_1 \xrightarrow[a]{} \lambda_1, \ldots, f_n \xrightarrow[a]{} \lambda_n$.

Théorème :
On suppose que F est un espace de dimension finie munie d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
Soit $f : A \subset E \to F$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ et $a \in \overline{A}$.
On a équivalence entre :
(i) $f \xrightarrow[a]{} \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$
(ii) $f_1 \xrightarrow[a]{} \lambda_1, \ldots, f_n \xrightarrow[a]{} \lambda_n$.

4°) Limite et restriction

Prop : Soit $f : A \subset E \to F$ et A' une partie de A.
Si a est adhérent à A' et si $f \xrightarrow[a]{} b$ alors $f_{|A'} \xrightarrow[a]{} b$.

Déf : Soit $f : A \subset E \to F$, $A' \subset A$ et $a \in \overline{A'}$. Sous réserve d'existence, on appelle limite de f en a selon A' la limite de $f_{|A'}$ en a. On la note $\lim\limits_{x \to a, x \in A'} f(x)$.

Prop : Soit $f : A \subset E \to F$, $A = A' \cup A''$ et $a \in \overline{A'} \cap \overline{A''}$.
Si $f(x) \xrightarrow[x \to a, x \in A']{} b$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to a, x \in A'']{} b$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

5°) Extensions de la notion de limite

Déf : Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ et $b \in F$.
Si A n'est pas majorée, on note $f \xrightarrow[+\infty]{} b$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$.
Si A n'est pas minorée, on note $f \xrightarrow[-\infty]{} b$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$.

Déf : Soit $f : A \subset E \to F$ et $b \in F$
Si A n'est pas bornée, on note $f \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} b$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|x\| \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$.

Déf : $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et a un élément adhérent à A.
On note $f \xrightarrow[a]{} +\infty$ ssi $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$.
On note $f \xrightarrow[a]{} -\infty$ ssi $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq -M$.

Les résultats raisonnablement attendus sont vrais.

6°) Outils de comparaison

Soit $f, g : A \subset E \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{K}$ et $a \in \overline{A}$.

Déf : On dit que f est dominée par φ en a ssi
$\exists M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leq M|\varphi(x)|$. On note alors $f \underset{a}{=} O(\varphi)$.

On dit que f est négligeable devant φ en a ssi
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x-a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon |\varphi(x)|$. On note alors $f = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Déf : On dit que f est équivalente à g en a ssi $f - g = \underset{a}{o}(\|g\|)$. On note alors $f \underset{a}{\sim} g$.

III. Continuité

1°) Définition

Prop : Si $f : A \subset E \to F$ CV en $a \in A$ alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Déf : Une application $f : A \subset E \to F$ est dite continue en $a \in A$ ssi $f \xrightarrow[a]{} f(a)$.
Une application $f : A \subset E \to F$ est dite continue ssi f est continue en chaque point $a \in A$.
On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues de A vers F .

Théorème :
Les fonctions lipschitziennes sont continues.

Cor : Les applications composantes dans une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie sont continues.

Prop : Si $f : A \subset E \to F$ est continue alors toute restriction de f l'est aussi.

Prop : Si $f : A \subset E \to F$ est continue et CV en $a \in \overline{A} \setminus A$ alors en posant $f(a) = \lim\limits_{a} f$, on prolonge f en une fonction continue sur $A \cup \{a\}$.

2°) Opérations sur les fonctions continues

Théorème :
Soit $f, g : A \subset E \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont continues alors λf et $f + g$ sont continues.
De plus, si F est une algèbre normée alors fg est continue.

Prop : Soit $\alpha : A \subset E \to \mathbb{K}$ et $f : A \subset E \to F$.
Si α et f sont continues alors $\alpha . f$ est continue.

Théorème :
Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telle que $f(A) \subset B$.
Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Théorème :
On suppose que F est un espace vectoriel normé produit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$.
$f : A \subset E \to F$ est continue ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ le sont.

Théorème :
Supposons que F soit de dimension finie n et muni d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
$f : A \subset E \to F$ est continue ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ le sont.

3°) Propriétés topologiques

a) image réciproque d'un ouvert/fermé

Théorème :
Soit $f : A \subset E \to F$. On a équivalence entre :
(i) f est continue,
(ii) l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A ,
(iii) l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé relatif de A .

Cor : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les ensembles $\{x \in E / f(x) = \alpha\}$, $\{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) \geq \alpha\}$ sont fermés.
Les ensembles $\{x \in E / f(x) \neq \alpha\}$, $\{x \in E / f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) > \alpha\}$ sont ouverts.

b) image d'un compact

Théorème :

Soit $f : A \subset E \to F$. Si A est une partie compacte de E et si f est continue alors $f(A)$ est une partie compacte de F .

Cor : Si A est une partie compacte non vide de E et $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors f admet un minimum et est maximum. On dit que f est bornée et atteint ses bornes.

Cor : Si A est une partie compacte non vide de E et $f : A \subset E \to F$ une fonction continue alors f est bornée et $\exists x \in A, \|f\|_\infty = \|f(x)\|$.

c) coïncidence sur une partie dense

Théorème :

Soit $f, g : A \subset E \to F$ continues.

Si f et g coïncident sur une partie B dense dans E alors $f = g$.

d) connexité par arc

Déf : Une partie A de E est dite connexe par arcs ssi $\forall a, b \in A$, il existe une application $\gamma : [0,1] \to E$ continue vérifiant $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma([0,1]) \subset A$. On dit que γ est un chemin allant de a à b inclus dans A .

Prop : Les parties convexes sont connexes par arcs.

Prop : Le produit cartésien de deux connexes par arc est connexe par arc.

Prop : Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

Théorème :

L'image directe d'un connexe par arc par une application continue et connexe par arc.

Cor : TVI généralisé

Si A est une partie connexe par arcs de E et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. En particulier f prend toute valeur intermédiaire entre deux valeurs déjà prises.

4°) Continuité uniforme

Déf : Une application $f : A \subset E \to F$ est dite uniformément continue ssi

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

Prop : Toute fonction uniformément continue est continue.

Prop : Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème :

Si A est une partie compacte de E alors toute fonction continue de A vers F est uniformément continue.

Cor : Toute fonction continue de $[a,b]$ vers F est uniformément continue.

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

On suppose ici les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie (donc complet).

1°) Vocabulaire

La théorie des suites et séries de fonctions numériques se reprend dans les mêmes termes dans le cas d'applications de $A \subset E$ vers un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie F .

Soit (f_n) suite de fonctions de A vers F .

(f_n) converge simplement vers $f : A \to F$ ssi $\forall x \in A, f_n(x) \to f(x)$.

(f_n) converge uniformément vers $f : A \to F$ ssi $\|f_n - f\|_{\infty, A} \to 0$.

$\sum f_n$ converge simplement ssi $\forall x \in A, \sum f_n(x)$ CV.

$\sum f_n$ converge uniformément ssi $\sum f_n$ CS et $\|R_n\|_\infty \to 0$

$\sum f_n$ converge normalement ssi $\sum \|f_n\|_\infty$ CV.

Prop : Pour les suites de fonctions vectorielles : $CU \Rightarrow CS$.
Pour les séries de fonctions vectorielles : $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$.

2°) Les théorèmes

Théorème :

Soit $f_n : A \subset E \to F$.

Si (f_n) CU vers $f : A \to F$ et si chaque f_n est continue alors f est continue.

Cor : Si $\sum f_n$ CU et si chaque f_n est continue alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

Théorème :

Si la convergence uniforme n'a lieu que sur tout compact de A , la conclusion perdure.

lemme : Si $f : A \subset E \to F$ est continue sur tout compact $K \subset A$ alors f est continue.

Théorème :

Soit $f_n : A \subset E \to F$ et $a \in \overline{A}$.

Si (f_n) CU vers $f : A \to F$ sur A et que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \xrightarrow[a]{} \ell_n$ alors (ℓ_n) CV vers un certain $\ell \in F$ et $f \xrightarrow[a]{} \ell$.

Cor : Si $\sum f_n$ CU sur A et que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \xrightarrow[a]{} \ell_n$ alors $\sum \ell_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

3°) La fonction exponentielle

On suppose que E est une algèbre normée de dimension finie (ex $E = \mathbb{C}$, $E = M_n(\mathbb{K})$,…)

Théorème :

L'application $x \mapsto \exp(x)$ est continue.

4°) La fonction inverse

On suppose à nouveau que E est une algèbre normée de dimension finie.

Prop : L'application $x \mapsto (1-x)^{-1}$ est continue sur $B(0,1)$

Théorème :

$U(E)$ est un ouvert de E et l'application $x \mapsto x^{-1}$ y est continue.